

## Repartido 9

### Átomo de hidrógeno.

**9-1.** Verifique por sustitución que la función propia del estado base  $\psi_{100}$  y el valor propio del estado base  $E$  satisfacen la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el átomo de hidrógeno.

**9-2.** a) Calcule el valor esperado  $\langle V \rangle$  para la energía del estado base del átomo de hidrógeno.

b) Demuestre que en el estado base:  $E = \langle V \rangle / 2$ , donde  $E$  es la energía total.

c) Use la relación  $E = K + V$  para calcular el valor esperado de la energía cinética  $\langle K \rangle$  en el estado base y demuestre que:  $\langle K \rangle = -\langle V \rangle / 2$ .

Estas relaciones se pueden obtener para cualquier estado de un sistema cuántico o clásico con un potencial de la forma:  $V(r) \propto -1/r$ , a estas relaciones se les llama *teorema del virial*.

**9-3.** Demuestre que la suma de las densidades de probabilidad para los estados cuánticos con  $n = 3$  del átomo de hidrógeno es esféricamente simétrica.

**9-4.** En este problema se trata de calcular la probabilidad de que un electrón del átomo de hidrógeno en el estado fundamental sea encontrado dentro del núcleo.

a) Calcule primero la respuesta exacta (denote el radio del núcleo por  $R$ ):

$$P = 1 - e^{-2R/a} \left( \frac{2R^2}{a^2} + \frac{2R}{a} + 1 \right)$$

b) Desarrolle el resultado anterior en serie de potencias de  $R/a$  y muestre que el término de orden más bajo es de la forma:  $P \approx (4/3)(R/a)^3$ , esta debería ser una buena aproximación, pues  $R \ll a$ .

c) Alternativamente, se podría pensar que la función de onda del estado fundamental es esencialmente constante en el pequeño volumen del núcleo, de modo que:

$P \approx \frac{4}{3} \pi R^3 |\psi_{100}(0)|^2$ . Verifique que esta aproximación reproduce el resultado de c).

d) Use  $R \approx 10^{-15} m$  y  $a \approx 10^{-10} m$  para hacer una estimativa numérica de  $P$ . Este valor puede ser interpretado como la fracción de tiempo que el electrón pasa dentro del núcleo.